対称式・交代式

$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$，$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ のように，（着目した）どの 2 つの文字を入れ替えても元の式と変わらない式を（着目した文字についての）**対称式**といい，$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$，$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$ のように，（着目した）どの 2 つの文字を入れ替えても元の式と符号が逆になる式を（着目した文字についての）**交代式**という。

設問　次の式の中から，対称式，交代式を選びなさい。また，どの文字についての対称式・交代式か答えなさい。

(ｱ)　$a^3+b^3+c^3$

(ｲ)　$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

(ｳ)　$(x-a)(y-a)+(x-b)(y-b)+(x-c)(y-c)$

(ｴ)　$(b-c)(x-a)(y-a)+(c-a)(x-b)(y-b)+(a-b)(x-c)(y-c)$

(ｵ)　$a^2b+b^2c+c^2a$

(ｶ)　$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

(ｷ)　$a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$

(ｸ)　$(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$

(ｹ)　$(ac+bd)^2+(ad+bc)^2+(a^2+b^2)(c^2+d^2)$

$a+b$, ab を a, b についての**基本対称式**，$a+b+c$, $bc+ca+ab$, abc を a, b, c についての**基本対称式**という。

いくつかの文字について，それらの文字から 2 つの文字を選び，差を作ることをすべても選び方について行って，それらをすべて掛け合わせてえられる式を，それらの文字についての**差積**（または**最簡交代式**）という。具体的には，a, b の差積は $a-b$, a, b, c の差積は$(a-b)(b-c)(c-a)$，a, b, c, d の差積は $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ となる。

一般には，$\sum$と同様の，積を表す記号$\prod$ を用いて表すことができる。a_1, a_2, ..., a_n の積 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$ を $\prod_{k=1}^{n} a_k$ や $\prod_{1\leq k\leq n} a_k$ などで表す。

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$$

この記号を用いると，n 個の文字 x_1, x_2, $\cdots$, x_n の差積（最簡交代式）は，$\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)$ と表される。

対称式や交代式に関して，次の事柄が成立する。

$\boxed{1}$	交代式は，最簡交代式（差積）で割り切れる。
$\boxed{2}$	1°)　対称式×対称式は対称式になる。
	2°)　対称式×交代式は交代式になる。
	3°)　交代式×交代式は対称式になる。

一般の n 個の文字 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に関する対称式，交代式で証明することができるが，ここでは a, b, c についての対称式，交代式について証明することにする。

（証明）

$\boxed{1}$ $f(a, b, c)$ を a, b, c についての交代式とする。文字 a, b を入れ替えると符号が逆になるから，$f(b, a, c)=-f(a, b, c)$ である。

ここで，$a=b$ を代入すると，$f(b, b, c)=-f(b, b, c)$ となる。よって，$f(b, b, c)=0$ である。因数定理より，$f(a, b, c)$ は $a-b$ を因数にもつ。同様に，文字 b と c を入れ替えても符号が逆になるから，$f(a, b, c)$ は $b-c$ で割り切れ，また，文字 c と a を入れ替えても同じだから，$f(a, b, c)$ は $c-a$ で割り切れる。

ゆえに，$f(a, b, c)$ は $(a-b)(b-c)(c-a)$ で割り切れる。すなわち，a, b, c の最簡交代式で割り切れる。

$\boxed{2}$ $h(a, b, c)=f(a, b, c)\times g(a, b, c)$ とする。

1°)　$f(a, b, c)$，$g(a, b, c)$ がともに a, b, c についての対称式のとき，

$$h(b, a, c)=f(b, a, c)\times g(b, a, c)=f(a, b, c)\times g(a, b, c)=h(a, b, c)$$

b と c，c と a を入れ替えても同じ結果が得られるから，$h(a, b, c)$ は a, b, c についての対称式である。

また，$f(a, b, c)$，$h(a, b, c)$ がともに a, b, c についての対称式のとき，$g(a, b, c)$ が a, b, c についての対称式となることを証明することもできる。

2°)　$f(a, b, c)$が a, b, c についての対称式，$g(a, b, c)$が a, b, c についての交代式のとき，

$$h(b, a, c)=f(b, a, c)\times g(b, a, c)=f(a, b, c)\times\left(-g(a, b, c)\right)=-h(a, b, c)$$

b と c，c と a を入れ替えても同じ結果が得られるから，$h(a, b, c)$は a, b, c についての交代式である。

3°)については，1°)，2°)と全く同様なので，省略する。 ∎

これらの結果を利用して，対称式，交代式を因数分解してみよう。

例題　次の式を因数分解しなさい。

(1)　$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$

(2)　$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$